

11-4

Наименование муниципального образования	Город Заринск
Наименование образовательной организации (полное название)	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №15 с углубленным изучением отдельных предметов города Заринска
Предмет	Математика
Дата проведения олимпиады	28.11.2018
Класс обучения	11
Класс участия	11
Ф.И.О участника	Капориный Виталий Сергеевич
Ф.И.О. учителя по математике	Зайферт Галина Владимировна
ИТОГОВЫЙ БАЛЛ	
Подписи членов жюри	
Зайферт Галина Владимировна	Зз
Иванова Александра Петровна	ИИ
Кондратьева Наталья Петровна	КН
Яргина Мария Анатольевна	ЯМ
Тимофеева Людмила Дмитриевна	ТД

N1.

1) Решим уравнение  $4\cos^2 x = 1$ ;

$$4\cos^2 x = 1;$$

$$4 \cdot \frac{1+\cos 4x}{2} = 1 \text{ (формула понижения степени);}$$

$$2+2\cos 4x = 1;$$

$$2\cos 4x = -1;$$

$$\cos 4x = -\frac{1}{2};$$

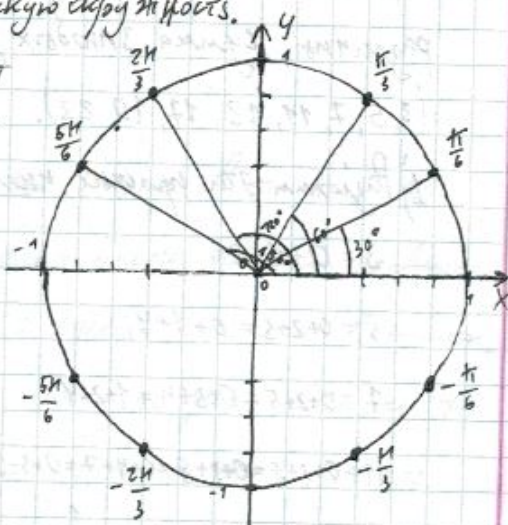
$$4x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k;$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2};$$

2) Нанесём точки на тригонометрическую окружность.

Получаем, что углы  $\Delta$  могут быть равны  $30^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  и  $150^\circ$ .

3) Т.к. сумма углов  $\Delta$  равна  $180^\circ$ , то  $150^\circ$  не подходит, т.к. в этом случае второй угол равен  $30^\circ$ , а третий  $-0^\circ$ , что невозможно.



4) Допустим, первый угол равен  $30^\circ$ . Тогда второй равен  $30^\circ$  и третий  $120^\circ$  (и наоборот). Значит, существуют варианты:  $30^\circ-30^\circ-120^\circ$ ,  $30^\circ-120^\circ-30^\circ$ ,  $120^\circ-30^\circ-30^\circ$ .

5) Допустим, первый угол равен  $30^\circ$ , а второй равен  $60^\circ$ . Тогда третий равен  $90^\circ$ , но такого угла нет в решении уравнения, значит углы  $30^\circ$  и  $60^\circ$  не могут находиться в таком  $\Delta$  вместе.

6) Допустим, первый угол равен  $60^\circ$ , тогда второй тоже равен  $60^\circ$ , и третий равен  $60^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ-30^\circ-120^\circ$ ,  $30^\circ-120^\circ-30^\circ$ ,  $120^\circ-30^\circ-30^\circ$ ,  $60^\circ-60^\circ-60^\circ$ .

№2.

Кароль Дити состоит из 4 цифр (0, 1, 2... 9), все цифры различны, сумма любых трех цифр в нем равна простому числу (3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23).

1) Разложим эти простые числа на слагаемые.

$$3 = 0 + 1 + 2;$$

$$5 = 0 + 2 + 3 = 0 + 1 + 4;$$

$$7 = 0 + 2 + 5 = 0 + 3 + 4 = 1 + 2 + 4;$$

$$11 = 0 + 2 + 9 = 0 + 3 + 8 = 0 + 4 + 7 = 0 + 5 + 6 = 1 + 4 + 6 = 1 + 3 + 7 = 1 + 9 + 1 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5;$$

$$13 = 0 + 4 + 9 = 0 + 5 + 8 = 0 + 6 + 7 = 1 + 3 + 9 = 1 + 7 + 5 = 1 + 5 + 7 = 2 + 3 + 8 = 2 + 4 + 7 = 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 6;$$



$$17 = 0+8+9 = \underline{1+7+9} = 2+6+9 = \cancel{2+8} = 3+5+9 = 3+6+8 = 4+5+8 = 4+6+7;$$

$$19 = 2+8+9 = \underline{3+7+9} = 4+6+9 = 4+7+8 = 5+6+8;$$

$$23 = 6+8+9;$$

2) Следующее простое число - 29, но оно не может быть получено суммой трёх различных цифр, т.к.  $9+8+7=24$ , а  $29 > 24$ .

3) Методом подбора выбираем такую комбинацию из четырёх цифр, что каждая комбинация трёх цифр из неё есть в этих рядах. Это комбинация 1379.

Ответ: 1, 3, 7, 9.

№3.

$$x^2 - x + 1 = (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 4);$$

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 4) - x^2 + x - 1 = 0;$$

$$x^4 + \underline{2x^3} + \underline{4x^2} + \underline{x^3} + \underline{2x^2} + \underline{4x} + \underline{x^2} + \underline{2x} + 4 - \underline{x^2} + \underline{x} - 1 = 0;$$

$$x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x + 3 = 0;$$

Чтобы разложить данный многочлен по схеме Горнера, находим делители числа 3.

$$3: \pm 1, \pm 3.$$

Подставим -1.

$$(-1)^4 + 3(-1)^3 + 6(-1)^2 + 7(-1) + 3 = 1 - 3 + 6 - 7 + 3 = 0;$$

Значит,  $a = -1$ .

	1	3	6	7	3
-1	1	2	4	3	0

остаток

Значит,  $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x + 3 = (x+1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4x + 3)$ .

Также разложим многочлен  $x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ .

$3: \pm 1, \pm 3$ .

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 + 4(-1) + 3 = -1 + 2 - 4 + 3 = 0;$$

Значит,  $a = -1$ .

	1	2	4	3
-1	1	1	3	0

остаток

Значит,  $(x+1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 4x + 3) = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x^2 + x + 3)$ .

Найдем  $D$  многочлена  $x^2 + x + 3$ .

$$D = 1^2 - 4 \cdot 3 = 1 - 12 = -11.$$

Значит,  $x^2 + x + 3 \neq 0$ .

$$(x+1)^2 \cdot (x^2 + x + 3) = 0, \text{ при } x^2 + x + 3 \neq 0;$$

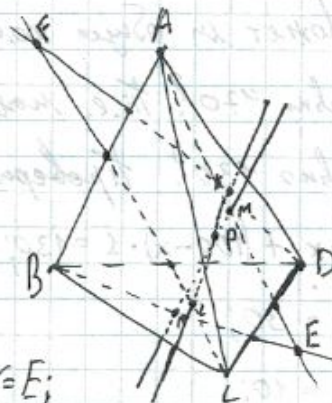
Значит,  $x+1=0$ ; следовательно  $x = -1$ .

Ответ:  $-1$ .

№ 4.

Дано:  $ABCD$ -трапеция,  $MN \parallel AB$ ,  $MN$  пересекает 2 грани,  $P \in MN$ ,  
 $KL \parallel CD$ ,  $KL$  пересекает 2 грани,  $P \in KL$ .





Доказать:  $\frac{MN}{AB} + \frac{KL}{CD} = 1$ .

Доказательство:

- 1) Проведём  $AM$  и  $BN$ ,  $AM \cap BN = E$ ;
- 2) В  $\triangle ABE$   $MN \parallel AB$ , значит  $MN$  — средняя линия  $\triangle ABE$  и  $MN = \frac{1}{2} AB$ ;
- 3) Проведём  $CL$  и  $DK$ ,  $CL \cap DK = F$ ;
- 4) В  $\triangle DCF$   $KL \parallel CD$ , значит  $KL$  — средняя линия  $\triangle DCF$  и  $KL = \frac{1}{2} CD$ ;
- 5)  $\frac{MN}{AB} + \frac{KL}{CD} = \frac{\frac{1}{2} AB}{AB} + \frac{\frac{1}{2} CD}{CD} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

Доказано.

№5.

П.к. 100 человек отвечали на ~~100~~ 6 вопросов, то всего есть 600 ответов. Любые 3 человека вместе ответили правильно не менее чем на 5 вопросов, т.е. суммарно не более 13 ошибок.

Допустим, что есть  $x$  человек, которые допустили по 4 ошибки, и  $100-x$ , которые допустили по 1 ошибке.

Может ли общее количество правильных ответов быть равно 470? И.е. может ли количество ошибок быть равно 130? Проверим.

$$4 \cdot x + (100 - x) \cdot 1 = 130;$$

$$3x = 30;$$

$$x = 10;$$

Получается, если 10 человек допустили по 4 ошибки, а 90 человек допустили по одной ошибке, то общее количество верных ответов равно 470. Значит, может.